數學傳播 48卷1期, pp. 3-8

數學跨領域可以是一個寬廣的
生活態度

許瑞麟

許瑞麟教授爲國立清華大學數學系學士, 美國北卡羅萊納州立大學作業研究 (Operations Research, Engineering School) 工程博士, 現爲國立成功大學數學系教授, 研究最佳化理論、數學規劃、演算法、大規模矩陣運算。他曾於 AT&T Bell Laboratories, Holmdel, New Jersey 任職, 研究空中運輸、飛行員排班、機場緊急狀況調度、高解析度電視。他有豐富的 Consulting experiences, 曾爲陽明海運、康是美、大統益、7-11 低溫倉儲、七堵調車場提供諮詢。

我的數學人生

似乎我的清華大學大一歲月仍恍如昨日, 而今天居然老到可以跟學生們聊聊數學人生。

我當年念數學系, 是不甘心而被迫接受的。到大二時下定決心念好數學, 卻是自願「爲我的老師念數學。」人生, 不管替自己活, 或替別人而活, 都同樣可以很美好!

每個人都可以有不一樣的生活態度。也都有權利追求完全不同的生活。李白的「春夜宴桃李園序」, 浮生若夢, 爲歡幾何? 既曠達, 又令人欽羨!陶淵明的「歸去來辭」, 富貴非吾願, 帝鄉不可期, 則是一種中庸, 逃避的是仕途, 而不是生活本身。就我而言, 我希望生活是和諧的, 不是叛逆。爲此, 我願意妥協念數學系, 這會讓我覺得舒服。但是我完全清楚, 這樣的選擇, 其實是一種修練。妥協且舒服, 完全不是一個邏輯上的必然。

可能來自於感性, 我寫過不少隨筆和散文。也可能來自於理性, 我讀過很多哲學。這一切從我小時候開始 – 自然也是被逼之下的妥協。在我妥協接受念數學系時, *我替「念好數學」所下的定義, 是要以數學的態度來思考與生活, 要讀活數學、要對數學很有感覺!* 今天, 我仍在這條道路上努力實踐著!

我選擇從清華大學數學系圖書館開始我的數學人生。從接受念數學的隔天 (1984.12.22) 開始, 我便到清大數圖「上班」。早上八點, 到晚上 10:30。除了上課、吃飯、社團活動, 只要有開館, 人就會在那裡。你不會在前面的閱覽書桌前看到我, 我的「窩」在後面的書庫。

我高中時念過蘇轍「上樞密韓太尉書」, 知道養氣需要遍遊名山大川, 也需要與豪俊交遊。

我主觀認爲, 讀數學也該如此。讀數學也應該要養出「數學的浩然正氣」, 雖然當時我不知道那該是什麼東西? 那麼,「圖書館」就是名山大川吧。

大學的覺悟, 有點晚。終究, 我的大學成績單不夠漂亮。我申請美國研究所時, 被所有的數研所拒絕。卻被所有的工業工程系和作業研究系 (Operations Research) 錄取, 包括史丹福大學。我選擇念一個州立大學, 是因爲他們把獎學金加碼到一個令我難以拒絕的條件。我相信, 我不會因爲念一個州立大學, 就不是一個史丹福大學等級的學生。

北卡羅萊納州立大學的作業研究 (OR) 研究所, 隸屬工學院。而且去了之後, 我才發現, 那是一個跨領域學程, 要修 72 個學分才能畢業。工學院的步調是很快的, 強調理論, 也強調實作與工廠實習。我們也要念數學, 我的自動控制、隨機過程、高等機率論、數值分析、多項式環都是在那裡學的。管理、經濟與財務也都是必修課。規定的副修, 碩士我選擇統計, 博士副修我選擇了 computer sciences 以及數學。

就算最基礎的「線性規劃」, 他們也把這個課教成 $n-m$ 維多面體幾何課。進階一點的自動控制, 則根本是泛函分析。隨機過程的課裡, 教訊息理論, 也研究數論。我蠻喜歡這樣的上課方式。可以利用數學把一個領域, 從起點看到目前工程上的各式應用以及其他的延伸。

我這時才對大二被迫接受念的數學, 開始有不一樣的感覺! 當視野開闊了, 這才發現, 人生上能看到很多領域真的是一件很有趣的事! 研究所時, 我每天念 15 小時的書。現在回想起來, 苦不堪言, 但卻是能讀出興趣的基本功夫。

我的跨域經驗談

我畢業後被聘進去 AT&T Bell Labs, 主要專長是線性規劃。線性規劃只是問題是線性的, 但是當 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 且 m,n 很大時 (可以大到 10^{40} 維度), $\{x\in\mathbb{R}^n\mid Ax=b, x\geq 0\}$ 這種帶有複雜邊界的 $n-m$ 維多面體, 其實數學系學的線性代數和幾何學用來計算是很不夠的。有效率處理線性規劃的手法是非線性的, 甚至是隨機演算法。至於整數型線性規劃, 處理一個離散集合 $\{x\in\mathbb{R}^n\mid Ax=b, x\in\{0,1\}^n\}$, 這是一個非凸性的二次規劃問題 $(x(x-1)=0)$, 是一個超過今天 Turing Machine 可以處理的 NP-hard 問題。

問題轉譯 (Problem transformation)

不管是空運 (民航)、海運 (貨櫃輪、散裝貨輪)、陸運 (軌道), 最重要的核心問題都是「排程」(scheduling)。紙漿公司, 從植林開始, 研究基因種庫、集材、運輸、配方、生產成本、營銷管控、市場預測分析等等。沙拉油廠, 從大豆品種、分類、蟲病害處理、契作、氣候預判、期貨 (中遠期、現貨、套利、避險), 到地緣政治 (戰略物資), 到配方、生產成本、營銷管控、市場預測分析等等。

如果不將問題轉譯成數學問題, 直接暴力用電腦去處理人做的事, 這個叫「自動化」, 那可

以降低成本, 但沒辦法解決 *決策的核心問題。決策的核心問題, 並不是一開始就清楚被定義的。* 像飛行員排班, 常常就是之前的人怎麼排, 後面的人就跟著做。承襲久了, 大家便習慣了固定常規的班表。因此排班是航空公司經營的核心問題, 一開始是沒被理解的。*分析、思考問題本質的能力才是關鍵。* 後來才知道, 排班思維的徹底翻新, 對公司營運效率至關重要。數學的解答, 可以算出人怎麼想都想不到的班表組合。

直接把手動排班, 改成電腦程式自動排班, 只是自動化人工流程, 對於營運績效改善, 杯水車薪。*雖然那時候, 這也被叫作是 AI 排班。* 如果人的想法一開始是僵硬的, 將這樣的想法 program 成爲電腦程式, 電腦跑出來的結果也必定是僵化的。後來將問題轉譯成 set covering problem, 搭配線性規劃求解, 才算找到突破的解方。*資工問題和數學問題* (仍須搭配電腦程式求解), 是完全不同的問題, 或者說, 是完全不同難度等級的問題。後者要困難很多很多。

錯誤更正碼、max-cut problem、largest ball in a polyhedron 等等, 可以轉譯成爲 Linear Programming。船舶進出港排程、岸邊作業都可以轉譯成爲 Integer Linear Programming。紙漿工廠植林的基因配種, 可以轉換成爲 second order cone programming。裁切紙捲、設計配方、飛行員排班問題, 可以轉譯爲 set covering problem。這些都是問題轉譯的重要實例。

核心數學問題: $A \cap B = \emptyset$

這包括: 非線性聯立方程組有沒有解? 有沒有「判別式」? 如果無解, 有沒有 asymptotic 的解? 如果有解, 其解有沒有 elementary representation? 如果沒有 elementary representation, 有沒有 computational procedure 去逼近? 其求解效能如何? 問題轉譯, 就是透過巧思, 將問題層層轉換 (通常很難一步到位), 設計出 A, B 集合, 然後將原問題的答案, 轉譯爲: A, B 集合相交會不會是空集合?

轉譯問題, 需要跨域思維

首先, 妳的數學真的要很強! 數學真的很難讀, 但這在跨領域佔盡優勢。最好, 分析、代數、幾何、計算機、機率、統計都要懂。或者說, 把妳們大學數學系每個科目都要念得很好。否則, 妳連手邊有哪些數學工具都不知道、不熟, 如何將問題轉譯成爲數學問題呢?

但是光只有數學很強, 還不夠! 妳還需要懂原始問題端。妳必須要跨領域, *否則妳不會知道數學要怎麼用? 妳不跨域, 就浪費妳在數學端所拿到的優勢。*

跨域溝通合作, 而不是跨域取代

能夠用對方領域的語言與對方溝通, 能夠用對方的視角來考慮問題。妳不需要變成對方領域的專家 (那叫搶飯碗), 也不需要去做對方的工作。一定要去看現場, 要走出去, 不能關在家裡

面跨域。看現場和在家看 Video 是完全兩碼子事。前者是主動觀察問題, 後者是被動吸收資訊。

專才? 還是通才?

每個人都有自己的能力圈。比如, 在座的各位, 能力圈都是在念書這一項、妳們可以比很多人把書念好。特別是數學。(如果妳羽球或畫畫或才藝其中一項比念書 (念數學) 好, 妳或許根本不應該出現在這裡!) 培養出能力圈的專業優勢, 很不容易。需要持久與專注 (妳們才正開始, 或剛剛開始沒多久!)。俗語說, 十年磨一劍, 鐵杵磨成繡花針正是持久力與專注力的寫照!

能力圈, 就是興趣嗎?

能力圈和興趣, 是完全不一樣的概念! 妳可能會說, 我其實沒那麼喜歡念書, 更不知道念數學要幹嘛。我比較感興趣的事, 是 (e.g.) 翻譯、打球、旅行、寫部落格、當網紅等等。如果說, 念書得要十年磨一劍。那憑什麼, 翻譯、打球、旅行、寫部落格、當網紅就可以不用?

讀書, 也沒有爲什麼, 就掙一口飯吃罷了! 更何況, 大學畢業並不是找一份短期飯票而已, 而是要找一份能做個 30、40 年的工作, 或者是陸續找好多份不同的工作, 撐過漫漫的 30、40 年! 靠翻譯、打球、旅行、寫部落格、當網紅來掙一張長期飯票的難度, 絕對不比讀書低!

那專注於能力圈就好, 還需要跨域變通才嗎?

雖然沒有人敢打包票說「一定要」跨領域, 但是我的觀察是, 最好要! 道理也很簡單, 通才在社會裡的存活率高! 由於社會高度的分化與分工, 科技與生活型態的快速變動, 能力圈, 具有超高的流行性, 因此都有一定的「有效期限」。過期, 就是作廢。千萬不要到妳的專業能力即將要過保鮮期時, 才來著急。來不及了!

殘酷的例證　絕非恐嚇

1980 年代, 高能物理方興未艾。但是 1989 年蘇聯解體, 到了 1992 年, 幾乎所有的高能實驗室都關門了! CRT 螢幕被 LCD 取代, 只花兩年 (1995∼1997)。當年各大學電機系許多都還開設有 CRT 螢幕這個組別, 但是畢業即失業! 2002 Supply chains 還在喊欠人, 2005 年的畢業生念 supply chain 的, 基本上已經找不到工作了! 鋼筆打敗鉛筆、原子筆後來打敗鋼筆。最後鉛筆、鋼筆、原子筆一起被螢幕和鍵盤 (幾乎快要) 掃進歷史灰燼了!

跨域學習制度面的困難在那裡?

跨域學習難以推動, 根本問題在那裡?

最最根本, 大家沒有理解跨域學習、和本科專業學習是迴然不同的學習概念。後者要追本

溯源, 層層構築, 厚重扎實; 前者卻是以一個搭便橋的概念, 講究的是效率、雙向 (多向) 溝通整合、聚焦單一核心概念、並提供容錯空間。

輔系、雙主修、跨域學程, 有解決跨域學習的問題嗎?

從一項數據: 全國各大學學生輔系、雙主修、跨域學程完成率之低, *都只有個位數百分點*, 就知道: 沒有! 原因首先, 當然是, 衝堂! 其次: 輔系、雙修, 跨域學程, 修的都是對方科系最專業核心的課程, 而且從頭學起! 手段上不但緩不濟急, 與跨域的目的, 主要是結合各自的專業來完成特定工作, 也存在重大落差 (*又不是叫你去變成對方領域的專家!*)。(舉例: 要做高解析度電視, 需要懂視神經如何運作傳導, 但有需要從細胞生物學開始念, 或去電機、生物醫學輔系或雙修嗎?)

通識課程, 有解決跨域學習的問題嗎?

如果, 把跨域學習的目的, 清楚具體寫出來是要 *讓學生有效率、高品質學習到跨域知識與技能, 以便於畢業後有一個穩定的工作*, 那本題的答案, 沒有! 首先、學期間通識課程與本科系課程衝堂問題依然沒有解決; 第二、通識課程均爲一般性與概念性的知識介紹, *但是今天所講的跨域, 不只是知識的跨域, 而是能力上的跨域*。現今的通識課程其深度、訓練強度、效率, 均不足以應付跨域工作需求。

跨域會失敗嗎?

答案當然是, 失敗率極高, 通常得一試再試!

學生要跨域, 想要做一個新的嘗試和探索, *會面臨極大的不確定性!* 當他跨域做到一半, 發現沒興趣、念不來、或想改變方向, 如果是在輔系、雙主修的軌道上, 8門 3 學分的課已經修了一半, 前進也不是, 後退也不是, 那學生會蒙受重大損失, 還有能力 (意願) 做下一次跨域的嘗試嗎?

工商時間

成大跨域模組化課程所提出的解決方案

解決衝堂的問題:

寒暑假實施, 完全沒有跟學期本科系課程衝堂問題。

重新設計全新課程 (這部分最花錢):

每門課以一週爲單位, 1 ∼ 1.5 學分, 聚焦單一課程目標 (right on target)。密集式學習每天上課 3 ∼7 小時, 在一星期中完成 (wrap-up-&-go), 學生必須高度投入 (engaged and devoted)。

開創第三學期 gap period 的學習概念, 學生利用寒暑假時間得到跨域的刺激和學習機會, 可以貫穿連結學期中的 3 學分專業課程, 非常類似在假期中做 Internship 的概念!

跨域推模組化課程所提出的解決方案

課程設計規範:

課程自我包含 (self-contained), 除微積分、普通物理、普通化學及普通生物之外不另設修課門檻, 重要預備知識, 課程需設計成自我包含, 只揀選跟本課程相關的部分重點快速介紹以降低修課門檻。課程濃縮、深化, 理論與實作並進: 早上老師講義授課, 下午實作、演習、考試、或報告。當天學, 當天學會、當天弄懂。

可以有容錯空間:

學生選修某個跨域模組, 就算唸了以後不喜歡, 損失只不過一星期 (還不必然是血本無歸的損失, 多少總是學到一些東西吧!)。成大跨領域模組化課程上課型態如下:

	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
1學分	每日 9:00~12:40 或 14:00~17:40, 課程須規劃並實施至少 40 分鐘的演習與實作。				
1.5學分	每日 9:00~15:30, 9:00~12:00 爲講授課, 13:00~15:30 爲演習、實作時間。				
2學分	需專案申請, 大多爲田野調查課程或實驗課程, 上課時間有必要時, 得延長至晚上時段。				

2024 **年寒假所開授課程如下**:

課程名稱	學分	開課人數	授課教師	上課日期 / 時間
遞迴最小二乘、卡爾曼濾波與配對交易	1.5	30	許瑞麟 國立成功大學數學系	2024/1/15(一) 至 19(五)9:00~15:30
文化資產材料分析及保存科學	1.5	20	龔慧貞 國立成功大學地球科學系	2024/1/15(一) 至 19(五) 9:00~16:00/16:30
用 Python 開發生物數據分析工具	1.5	35	吳謂勝 國立成功大學電機工程學系	2024/1/8(一) 至 12(五)9:00~15:30
深度學習基因體探索導論	1.5	15	楊子賢 國立成功大學生物醫學工程學系	2024/1/15(一) 至 19(五)9:00~15:30

歡迎全國各大專院校同學利用成大模組化課程跨校選修, 開啟您的跨領域人生。

—本文作者爲國立成功大學數學系教授兼通識教育中心主任—